

L2 Flex, Université Toulouse 3

**CC4 d'Algèbre linéaire 2, 1h30
20 décembre 2023**

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées!

Exercice 1 (4p): Soit a un nombre réel. On regarde la famille de vecteurs $F = \{(a, 1, 2), (2a, 2, 2a), (0, 1, 2)\}$ dans \mathbb{R}^3 . Pour quels valeurs de a la famille F est-elle

1. libre?
2. génératrice?
3. une base de \mathbb{R}^3 ?
4. Pour quels valeurs de a la famille F engendre-t-elle une sous-espace de dimension 2 dans \mathbb{R}^3 ?

Exercice 2 (3p): On considère l'espace vectoriel de matrices réelles $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Trouver une décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus G$$

telle que F_1 et F_2 ne consistent que de matrices nilpotentes et que $\dim(G) = n$.

3. Cette décomposition est-elle unique? *Indication:* Penser à la relation d'équivalence "semblable" pour les matrices.

Exercice 3 (5p): On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ définie pour chaque polynôme P par

$$f(P)(x) = P(x-1) - P(x)$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que si $\deg(P) > 0$ alors $\deg(f(P)) = \deg(P) - 1$. En déduire $\ker(f)$.
3. En déduire que f est nilpotent d'ordre 3.
4. Donner la matrice de f dans la base canonique $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
5. Donner le polynôme caractéristique $P_f(x)$ de l'endomorphisme f .

Exercice 4 (10p): Soit \mathbb{R}^2 l'espace vectoriel de dimension 2 avec sa base canonique. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (2x - y, x)$.

1. Est-ce que f est linéaire, injective, surjective, bijective?
2. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
3. Calculer le polynôme caractéristique $P_f(x)$ de f . En déduire la ou les valeurs propres de f .
4. Déterminer le ou les sous-espaces propres de f .
5. Est-ce que f est diagonalisable sur \mathbb{R} ?
6. Est-ce que f est trigonalisable sur \mathbb{R} ? Si "oui", trigonaliser f et donner une matrice de passage.
9. Calculer A^k , $k \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la division euclidienne et le Théorème de Cayley-Hamilton.